ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 8 (ตอนที่ 3/5)

โดยช่วงตั้งแต่ 18 ต.ค. 59-3 มี.ค. 60 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. ถ้า a เป็นคำตอบของ $\log_{2x} 216 = x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง แล้ว $\log_a \sqrt{3} + \log_{1/a} \sqrt{a}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 3 2) 2
3) 1 4) 0

2. ให้ x เป็นจำนวนจริง, $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & x+2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & -x \\ x-1 & 0 \end{bmatrix}$ ถ้า det (A + B) = 16 แล้ว $|\det(AB^{-1})|$ เท่ากับเท่าใด

1) 1 2) 2
3) 3 4) 4

3. กำหนดให้ log x, log (x + 2), log (x + 16) เป็น 3 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต (เรียงจากพจน์แรกถึงพจน์ที่สาม) ถ้า a_{10} แทนพจน์ที่ 10 และ S_{10} แทนผลบวกของ 10 พจน์แรกของลำดับนี้ แล้ว a_{10} และ S_{10} มีค่าเท่ากับเท่าใดตามลำดับ

1) 9 log 5 − 8 log 3 และ 5(9 log 5 − 7 log 3)
2) 9 log 5 − 8 log 3 และ 5(9 log 7 − 2 log 3)
3) 9 log 7 − log 3 และ 5(9 log 5 − 7 log 3)
4) 9 log 7 − log 3 และ 5(9 log 7 − 2 log 3)

4. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้าส่วนจริงของ a + bi คือ a แล้วผลบวกของส่วนจริงของคำตอบของสมการ $(z-1)^4 = 16(z+1)^4$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) $-\frac{59}{15}$ 2) $-\frac{68}{15}$
3) $\frac{59}{15}$ 4) $\frac{68}{15}$

5. วงกลม O แนบนอกรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด A(2, 0), B(0, 4) และ C(4, 6) ถ้า (a, b) เป็นพิกัดของจุดศูนย์กลางของวงกลม O แล้ว a + b มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 2 2) 4
3) 5 4) 6

เฉลย

1. เฉลย 4) 0

จาก $\log_{2x} 216 = x$

จะได้ $(2x)^x = 216$

$2^x \cdot x^x = 2^3 3^3$

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้คือ x = 3 นั่นคือ a = 3 และจะได้

$$\log_a \sqrt{3} + \log_{1/a} \sqrt{a} = \log_3 (3)^{1/2} + \log_{1/3} (1/3)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

2. เฉลย 1) 1

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ x+2 & x+2 \end{bmatrix}$$

จาก $\det(A+B) = 4(x+2) = 16$

จะได้ $x = 2$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และจะได้ det (A) = −2 และ det (B) = 2

ดังนั้น $\det(AB^{-1}) = \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)} = \frac{-2}{2} = -1$

นั่นคือ $|\det(AB^{-1})| = |-1| = 1$

3. เฉลย 4) 9 log 7 − log 3 และ 5(9 log 7 − 2 log 3)

ให้ $a_1 = \log x$

$a_2 = \log(x+2)$

$a_3 = \log(x+16)$

ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้คือ

$$d = a_2 - a_1 = \log(x+2) - \log x$$
$$= \log\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

พจน์ที่สามคือ $a_3 = a_1 + 2d$

$$\log(x+16) = \log x + 2\log\left(\frac{x+2}{x}\right)$$
$$= \log\left(x\left(\frac{x+2}{x}\right)^2\right)$$
$$= \log\left(\frac{(x+2)^2}{x}\right)$$

ดังนั้น $x + 16 = \frac{(x+2)^2}{x}$

$x^2 + 16x = x^2 + 4x + 4$

$12x = 4$

$x = \frac{1}{3}$

และจะได้ $a_1 = \log\left(\frac{1}{3}\right)$ และ $d = \log\left(\frac{\frac{1}{3}+2}{\frac{1}{3}}\right) = \log 7$

$$a_{10} = a_1 + 9d$$
$$= \log\left(\frac{1}{3}\right) + 9\log 7$$
$$= 9\log 7 - \log 3$$

และ $S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$

$$= 5\left(\log\left(\frac{1}{3}\right) + 9\log 7 - \log 3\right)$$
$$= 5(9\log 7 - 2\log 3)$$

4. เฉลย 2) $-\frac{68}{15}$

$$(z-1)^4 = 16(z+1)^4$$
$$(z-1)^4 - 16(z+1)^4 = 0$$
$$((z-1)^2)^2 - (2^2(z+1)^2)^2 = 0$$
$$((z-1)^2 + 2^2(z+1)^2)((z-1)^2 - 2^2(z+1)^2) = 0$$
$$(5z^2 + 6z + 5)((z-1) + 2(z+1))((z-1) - 2(z+1)) = 0$$
$$(5z^2 + 6z + 5)(3z+1)(-z-3) = 0$$

$5z^2 + 6z + 5 = 0$ หรือ $3z + 1 = 0$ หรือ $-z - 3 = 0$

$z = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 5\cdot 5}}{2\cdot 5}$ หรือ $z = -\frac{1}{3}$ หรือ $z = -3$

$z = \frac{-6 \pm 8i}{10} = -\frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$ หรือ $z = -\frac{1}{3}$ หรือ $z = -3$

ผลบวกของส่วนจริงของคำตอบของสมการคือ $\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + (-3) = -\frac{68}{15}$

5. เฉลย 4) 6

วิธีที่ 1 ให้ E(a, b) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่แนบนอกรูปสามเหลี่ยม ABC

จะได้ว่า $|EA| = |EB| = |EC|$

หรือ $|EA|^2 = |EB|^2 = |EC|^2$

$$(a-2)^2 + (b-0)^2 = (a-0)^2 + (b-4)^2 = (a-4)^2 + (b-6)^2$$
$$a^2 + b^2 - 4a + 4 = a^2 + b^2 - 8b + 16 = a^2 + b^2 - 8a + 16 - 12b + 36$$
$$-4a + 4 = -8b + 16 = -8a - 12b + 52$$

จาก
$$\begin{cases} -4a + 4 = -8b + 16 & \text{...(1)} \\ -8b + 16 = -8a - 12b + 52 & \text{...(2)} \end{cases}$$

จะได้ a = 3 และ b = 3

ดังนั้น a + b = 3 + 3 = 6

วิธีที่ 2 เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านของรูปสามเหลี่ยมผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมที่แนบนอกรูปสามเหลี่ยม ดังนั้นจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านของรูปสามเหลี่ยมคือจุดศูนย์กลางของวงกลม

ขั้นที่ 1 หาเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้าน AB

ความชันของด้าน AB เท่ากับ $m_{AB} = \frac{4-0}{0-2} = -2$

ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับด้าน AB เท่ากับ $m_{\perp AB} = \frac{1}{2}$

จุดกึ่งกลางของด้าน AB คือ $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1, 2)$

สมการของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้าน AB คือ

$y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$ หรือ $x - 2y = -3$ ...(1)

ขั้นที่ 2 หาเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้าน AC

ความชันของด้าน AC เท่ากับ $m_{AC} = \frac{6-0}{4-2} = 3$

ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับด้าน AC เท่ากับ $m_{\perp AC} = -\frac{1}{3}$

จุดกึ่งกลางของด้าน AC คือ $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (3, 3)$

สมการของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้าน AC คือ

$y - 3 = -\frac{1}{3}(x-3)$ หรือ $x + 3y = 12$ ...(2)

ขั้นที่ 3 หาจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้าน AB และ AC

แก้ระบบสมการ (1) และ (2)

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

ได้จุดตัด (a, b) = (3, 3) จุดตัดนี้คือ จุดศูนย์กลางของวงกลม O ที่แนบนอกรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้ และจะได้ a + b = 6

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaew.com